www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

ECOLE SPECIALE DES TRAVAUX PUBLICS, DU BATIMENT ET DE L'INDUSTRIE **SESSION 1990**

CONCOURS COMMUN D'ADMISSION
AUX ECOLES SUPERIEURES
DES TRAVAUX PUBLICS
DU BATIMENT
DE MECANIQUE-ELECTRICITE
DE TOPOGRAPHIE

PREMIERE INTERROGATION DE MATHEMATIQUES

Durée : 3 heures

NOTA 1 : *Les cinq sujets sont totalement indépendants et peuvent être traités dans un ordre quelconque, sous réserve d'indiquer très clairement leur numéro.*

Dans la rédaction de leurs copies, les candidats sont priés de bien vouloir encadrer *chacun des résultats correspondants aux éléments* encadrés *dans les énoncés, et ceux-ci seulement.*

Dans cette épreuve comme dans toutes celles qui suivront, il sera tenu compte de la qualité de la présentation, écriture, concision et précision, mise en évidence des résultats.

NOTA 2 : *Dans les sujets 1, 2, 3 et 5, les espaces $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ sont des espaces affines euclidiens munis de repères orthonormés directs, notés $(O, \vec{i}, \vec{j})$ en dimension deux, et $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ en dimension trois.*

SUJET N° 1

Soit f une fonction de la variable réelle t, à valeurs réelles ou complexes. On lui associe l'ensemble E des points M du plan dont l'affixe $z = x + iy$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, satisfait à la relation $z^2 = f(t)$, $t \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que l'ensemble E_1 associé à $f_1(t) = t$ est la réunion de 2 droites à préciser.
2. Montrer que l'ensemble E_2 associé à $f_2(t) = 1 + it$ est une hyperbole que l'on dessinera et dont on donnera l'équation des asymptotes.
3. Quel est l'ensemble E_3 associé à $f_3(t) = 1 + it^2$?
4. Reconnaître géométriquement, et dessiner, l'ensemble D des points P(t) d'affixe $f_4(t) = 2/(1-it)$.
5. Etudier et dessiner l'ensemble E_4 associé à f_4.

SUJET N° 2

Soit (C) le cercle de l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$, d'équations $x = 0$ et $y^2 + z^2 - 2ay = 0$, où a est un réel strictement positif fixé.

1. On fait tourner (C) autour de la droite (Oz). Montrer que (C) engendre une surface de révolution (T) d'équation $f(x,y,z) = 0$, avec $f(x,y,z) = (x^2 + y^2 + z^2)^2 - 4a^2(x^2 + y^2)$.
On admettra au besoin ce résultat pour la suite.

2. On appelle (S) la courbe plane d'équations $x=0$ et $f(a,y,z) = 0$ (c'est donc, si l'on préfère, la projection orthogonale sur le plan yOz de la section de (T) par le plan d'équation $x=a$), et l'on appelle (S_1) la partie de (S) telle que $y \geqslant 0$ et $z \geqslant 0$.
Pour tout point M(O, y, z) de (S_1), on pose $y = a.\mathrm{tg}\, t$. Donner une représentation paramétrique de (S_1) dans son plan yOz, soit $y = a.\mathrm{tg}\, t$, $z = v(t)$, en précisant l'expression de $\boxed{v(t)}$ (qui comporte un radical) et l'intervalle I (inclus dans $[0, \pi/2[$) que doit décrire t.

T.S.V.P.

3. Même question pour une représentation en coordonnées polaires de (S_1) dans son plan yOz, soit $\rho = h(\theta)$, telle donc que $y = \rho \cos\theta$ et $z = \rho \sin\theta$, avec $h(\theta)$ positif. Préciser l'expression de $\boxed{h(\theta)}$ en fonction de l'angle 2θ (elle comporte deux radicaux emboîtés) et l'intervalle J (inclus dans $[0,\pi/2]$) que doit décrire θ.

4. Montrer que (S_1) admet, dans son plan yOz, une équation de la forme $z = \psi(y)$, où $\boxed{\psi}$ est une fonction définie sur $[\,0, a\sqrt{3}\,]$, que l'on précisera. Dessiner (S_1) et (S) sur la même figure.

5. Montrer que (S) est l'ensemble des points M(y,z) du plan yOz, dont le produit des distances à deux points $\boxed{A}$ et $\boxed{A'}$ de ce plan vaut une constante $\boxed{K}$.

SUJET N° 3

Soit (C) la courbe de l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ d'équations paramétriques :

$$x = \int_0^t \frac{du}{\sqrt{1+u+u^3}}\ ,\quad y = \int_0^t \frac{du}{\sqrt{1+u^2+u^3}}\ ,\quad z = \int_0^t \frac{du}{\sqrt{1+u^3}}\ ,\quad t \geqslant 0.$$

1. Déterminer par ses coordonnées un vecteur directeur $\boxed{\vec{V}}$ de la tangente en O à (C).

2. Démontrer que, lorsque t tend vers $+\infty$, x(t) , y(t), z(t) ont des limites finies a, b, c (qu'on ne cherchera pas à calculer). On note A le point de coordonnées (a,b,c).

3. Etudier le sens de variation des fonctions x(t) , y(t) et z(t) sur $[0,+\infty[$.

4. Soit s(t) l'abscisse curviligne de l'arc associé à (C), orienté dans le sens des t croissants, d'origine O et d'extrémité le point M de paramètre t . Donner un $\boxed{\text{développement limité}}$ d'ordre 3 de s(t) en t=0.

5. Pour $(\Gamma) = (C) \cup \{A\}$, étudier l'existence d'une demi-tangente en A.

SUJET N° 4

Soit P le polynôme tel que $P(X) = X^3 - 2X^2 - X + 1$, et A la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

1. Déterminer la valeur de $\boxed{P(A)}$, polynôme de la matrice A.

2. En identifiant P et la fonction polynôme associée, montrer que l'équation P(x)=0 admet 3 racines réelles r_1 , r_2 , r_3 , telles que $r_1 < r_2 < r_3$. On donnera les valeurs des parties entières respectives $\boxed{e_1}$, $\boxed{e_2}$, $\boxed{e_3}$.

3. On introduit la division euclidienne de X^n , n entier positif ou nul, par P(X), soit

$$X^n = P(X).Q_n(X) + R_n(X)$$

T.S.V.P.

Montrer que l'on a $R_n(X) = (r_1)^n.V_1(X) + (r_2)^n.V_2(X) + (r_3)^n.V_3(X)$,

où les V_j, j=1,2,3, sont des polynômes de degré 2. Exprimer $\boxed{A^n}$ à l'aide de ces polynômes.

4. Soit z_1, z_2, z_3 des racines carrées complexes de r_1, r_2, r_3. Dans l'expression de R_n trouvée dans la question précédente, on remplace $(r_1)^n$, $(r_2)^n$, $(r_3)^n$ par z_1, z_2, z_3. On obtient ainsi un polynôme S(X) de degré 2. Calculer $(S(r_1))^2$, $(S(r_2))^2$, $(S(r_3))^2$.

5. Montrer que ce calcul permet de déterminer des matrices B, à coefficients complexes éventuellement, telles que $B^2 = A$. Combien en trouve-t-on au plus ?

SUJET N° 5

On considère dans le plan euclidien $\mathbb{R}^2$ les points A = (1,0) et B = (0,1). Au couple de points (M_0,M_1), de coordonnées respectives (x_0,y_0) et (x_1,y_1), on associe le point M_2 de la manière suivante, **quand c'est possible :**

(I) P_0 est l'intersection avec (AB) de la parallèle à (Ox) menée par M_0.
(II) Q_0 est l'intersection avec (AM_1) de la parallèle à (BM_1) menée par P_0.
(III) M_2 est l'intersection de la parallèle à (Ox) menée par Q_0 avec la parallèle à (BM_1) menée par M_0.

1. Calculer les coordonnées $\boxed{(x_2,y_2)}$ de M_2 en fonction de celles de M_0 et M_1.
On trouvera en particulier $y_2 = y_0.y_1$, ce qu'on pourra au besoin admettre dans la question 5.

2. On appelle ★ la loi de composition interne définie sur $\mathbb{R}^2$ tout entier par les **formules** trouvées précédemment, et l'on notera $M_2 = M_0 \bigstar M_1$. Montrer que cette loi ★ admet un élément neutre E que l'on déterminera.

3. Cette loi ★ est-elle associative ?

4. Quand l'inverse M'_0 de M_0 pour la loi ★ existe, calculer ses coordonnées $\boxed{(x'_0,y'_0)}$.

5. On définit la suite de points (M_n) au moyen de la relation de récurrence suivante :

$$M_{n+2} = M_n \bigstar M_{n+1}, \qquad n \geqslant 0, M_0 \text{ et } M_1 \text{ donnés par } (x_0,y_0) \text{ et } (x_1,y_1).$$

Calculer l'ordonnée y_n de M_n en fonction de y_0, y_1 et n. Que vaut en particulier $\boxed{y_{10}}$?

---------- 0 ----------

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail